安定マッチング問題に関する最近の話題

AUTHOR(S):

宮崎, 修一

社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
AI2009-12（2009-9）

[招待講演] 安定マッチング問題に関する最近の話題

宮崎　修一†

† 京都大学 学術情報メディアセンター
京都市左京区吉田本町
E-mail: †shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

あらまし　安定マッチング問題とは，男女の集合と，各人の異性に対する希望リストが与えられたとき，「安定性」と呼ばれる性質を満たす男女間のマッチングを求める問題である．本問題は，研修医の病院配属や生徒の学校への配属，大学における学生の研究室配属等，応用の広い問題である．本講演では，本問題の紹介を行うと共に，関連するいくつかの問題に対する最近の話題を，著者の研究グループが得た成果を中心に紹介する．

キーワード　安定マッチング問題，近似アルゴリズム

[Invited Talk] Recent Topics on the Stable Matching Problems

Shuichi MIYAZAKI†

† Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University
Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku Kyoto 606-8501, Japan
E-mail: †shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

Abstract　In the stable matching problem, we are given a set of men and women, and each person's preference list that orders members of the opposite gender. Our task is to find a matching between men and women that satisfies the "stability" condition. This problem has wide variety of applications in real-world, such as assigning medical students to hospitals, primary school students to secondary schools, and graduate students to supervisors. In this presentation, we introduce the problem and show some elementary properties of the problem. We also show some of recent results on this problem, which are mainly obtained by the authors.

Key words　stable marriage problem, approximation algorithms

1. は じ め に

安定マッチング問題（**安定結婚問題**とも言う）は，1962 年に Gale と Shapley により提唱された問題である [5], [8]．入力として，同数 (n とする) の男女の集合および各個人の**希望リスト**が与えられる．希望リストとは，その個人の好みに従って異性全員を全順序で並べたリストである．**マッチング**とは，男性から女性への 1 対 1 写像（すなわち，n 組の男女のペア）である．マッチング M における男性 m のパートナーを $M(m)$，女性 w のパートナーを $M(w)$ と書く．マッチング M において，ペアになっていない m と w が，(1) m は $M(m)$ より w を好む，(2) w は $M(w)$ より m を好む，の両方を満たすとき，(m, w) を M における**ブロッキングペア**と言う．すなわち，m と w は，今のパートナーと別れてマッチすることにより，共に得をする．ブロッキングペアの存在しないマッチングを**安定マッチング**という．安定マッチング問題は，与えられた入力例題から安定マッチングを求める問題である．Gale と Shapley は，任意の入力例題に最低 1 つの安定マッチングが存在すること，および，それを見つける $O(n^2)$ 時間のアルゴリズム（**Gale-Shapley アルゴリズム**と呼ばれている）を示した [5]．また，一般には，1 つの例題に対して複数の安定マッチングが存在する．

安定マッチング問題は幅広い応用を持つ．その中でも最も有名なものが，研修医の病院配属であろう．アメリカでは，研修医と病院双方が希望リストを提出し，それに基づいた安定マッチングにより研修医の配属先を決定するシステムが，1952 年から運用されている [27]（1 つの病院に複数の研修医を配属する必要もあるが，上記の定義において，「女性は複数の男性とマッチできる」という拡張を加えたものが使われている）．ここでは，毎年約 3 万人の研修医と約 2 万の募集枠の間でのマッチングが行われている．同様のシステムはカナダ [25] やイギリス（スコットランド）[28] にも見られ，日本でも 2003 年からスタートした [26]．その他に，生徒の学校配属 [22] や大学院生の研究室配属 [1]，最近では腎臓交換移植における交換ペアの決定 [21] にも応用が見られる．

上記のように応用が広いこと，また，数学的に美しい構造を持っていることから，安定マッチング問題は，数学，経済学，計算機科学など多くの分野で研究対象となっている．本講演では，安定マッチング問題の基本的な性質，および，最近筆者らの研究グループによって得られた結果を幾つか紹介する．

2. 最大サイズ安定マッチング問題

安定マッチング問題の定義において，各人は**異性全員**を**全順序**で希望リストに書かなければならなかった．しかし，例えばアメリカの研修医配属（3 万人の研修医と 2 万個のポスト）を考えると，この制約は実用的でない．従って，自然な拡張として，マッチしたくない相手はリストに書かなくて良い**不完全リスト**および同程度の好みの人は同順位にして良い**同順位リスト**が考えられている．

不完全リストにおいては，リストに書いていない人とはマッチさせられないため，不完全マッチングも考える必要があり，ブロッキングペアの定義を拡張する必要がある．マッチング M に対して，(1) 男性 m と女性 w はお互いをリストに書き合っており，(2) m が独身であるか $M(m)$ よりも w を好み，かつ，(3) w が独身であるか $M(w)$ よりも m を好むとき，(m, w) を M に対するブロッキングペアと定義する．この拡張においても，安定マッチングは少なくとも 1 つ存在し，Gale-Shapley アルゴリズムの簡単な修正によりそれを求めることができる．前述したように安定マッチングは必ずしも完全マッチングとは限らないが，全ての安定マッチングにおいてマッチする男女集合が同じである（すなわち，1 つの安定マッチングでマッチする人は，他のどの安定マッチングでもマッチする）ことが知られている [6]．従って，必然的に全ての安定マッチングは同サイズとなる．

同順位を許す場合は，ブロッキングペアの定義は 3 種類提案されているが [12]，ここでは最も自然な**弱安定性**を考える．すなわち，第 1 節に書いた定義と同じで，男女共に今のペアよりもお互いを**より好む**ものを対象とするものである．(この他に**強安定**と**超安定**という概念があり，これらは，今のペアと同順位の相手でもブロッキングペアの対象とするものである.) この拡張においては，入力例題の希望リスト内の同順位を任意に壊す（つまり，無理に順位をつける）ことにより得られた（拡張を許す前の）例題の安定マッチングが，そのまま現在の例題の安定マッチングになることが容易に分かる．従って，やはり安定マッチングは必ず存在し，それを $O(n^2)$ 時間で求めることが出来る．

不完全リストと同順位を両方許した場合のブロッキングペアは，上記の両拡張における場合から自然に定義できる．また，安定マッチングは少なくとも 1 つ存在し，同順位を適当に壊して Gale-Shapley アルゴリズムをかけることにより，上記と同様に安定マッチングを求めることができる．不完全リストを許しているので，安定マッチングは完全マッチングとは限らない．今回は不完全リストのみの場合と異なり，1 つの入力例題に異なるサイズの複数の安定マッチングが存在する可能性がある．従って，出来るだけ大きなサイズの安定マッチングを求めることが応用上重要となる．

本研究では，最大サイズの安定マッチングを求めるという最適化問題 (**MAX SMTI**; SMTI は「Stable Marriage with Ties and Incomplete lists」を意味する) を考え，この問題が NP 困難であることを示した [13]．NP 困難な最適化問題に対しては，**多項式時間近似アルゴリズム**を与えるのが解決策の 1 つである．近似アルゴリズムの性能は**近似度**で評価される．最大化問題における近似度の定義は以下のようになる．近似アルゴリズム A の近似度が c である（「A は c-近似アルゴリズムである」とも言う）とは，任意の入力例題 I に対して

$$\max \left\{ \frac{opt(I)}{A(I)} \right\} \leqq c$$

が成り立つということである．ここで，$opt(I)$ は例題 I 中の最大安定マッチングのサイズ，$A(I)$ はアルゴリズム A が求める安定マッチングのサイズである．すなわち，アルゴリズム A は，どんな入力に対しても最大サイズの $1/c$ 以上のサイズの答を求めることができる．c は 1 以上の値をとり，小さいほどアルゴリズムの性能が高いことを示す．

2-近似アルゴリズムの構築は比較的簡単であるが，近似度を 2 よりも厳密に良くすることは難しい．漸近的には 2 になってしまう $2 - o(1)$ という近似度で，$o(1)$ 部分を改良する程度に留まっていた [14], [15]．その後 2007 年に初めて 2 を切る近似度 1.875 のアルゴリズムに成功した [16]．以上のアルゴリズムはいずれも，任意の安定マッチングから出発して逐次的にサイズを大きくしていくという局所探索型のアルゴリズムである．以後，2008 年に Király [19] により 5/3，2009 年に McDermid [20] により 1.5 へと立て続けに改良が重ねられ，現在最良の近似度は 1.5 である．P$\neq$NP の仮定の下での近似度の下限は 33/29($\simeq$ 1.137) であり [24]，これらの間にはまだ開きがあるので，改良の余地は残されている．

3. 男女平等安定マッチング問題

異性全員を全順序でリストに書くオリジナルの問題を考える．前述したように，Gale-Shapley アルゴリズムを使えば安定マッチングを $O(n^2)$ 時間で求めることができる．しかし，Gale-Shapley アルゴリズムにより求められた解は，全ての男性は可能なパートナーの中で最良の女性を得，全ての女性は可能なパートナーの中で最悪の男性を得るという性質を持つ [5]．ここで言う「可能なパートナー」とは，複数存在しうる安定マッチングのいずれかにおいてパートナーとなる異性を意味する．このようなマッチングを**男性最適安定マッチング** (かつ**女性最悪安定マッチング**) と呼ぶ．また，Gale-Shapley アルゴリズムにおいて，男性と女性の役割を交換することにより，**女性最適安定マッチング** (かつ**男性最悪安定マッチング**) が求まる．これらの安定マッチングは両極端であるので，ある程度公平なマッチングを求めるという問題が考案されている．公平さの尺度は様々考えられるが，以下の 3 つが自然である．

安定マッチング M において，人物 p がマッチしている相手の（p の希望リスト上での）順位を $c_M(p)$ と表す．これはある

意味，p の**不満度**を表しているとも言える．X を男性集合，Y を女性集合としたとき，

$$C(M) = \sum_{p \in X \cup Y} c_M(p)$$

が最小となる M を求める問題を**最小不満度安定マッチング問題**という．すなわち，全員の不満度の総和を最小化する問題である．

$$R(M) = \max_{p \in X \cup Y} c_M(p)$$

が最小となる M を求める問題を**最小後悔安定マッチング問題**という．最も不満な人の不満度を最小化する問題である．

$$D(M) = |\sum_{p \in X} c_M(p) - \sum_{p \in Y} c_M(p)|$$

が最小となる M を求める問題を**男女平等安定マッチング問題**という．男性の不満度の総和と女性の不満度の総和を出来るだけ近づける問題である．

全ての安定マッチングを列挙し，その中で最良のものを選べば最適解を求めることができるが，一般に安定マッチングは入力サイズの指数個あり [2], [10], [23]，多項式時間では動作しない．それにも関わらず，全ての安定マッチングからなる分配束構造を利用することにより，最小不満度安定マッチング問題と最小後悔安定マッチング問題は多項式時間で最適解を得ることができる [3], [4], [7], [11]．しかし，男女平等安定マッチング問題は NP 困難であることが示されている [18]．

本研究では，男女平等安定マッチング問題に対して，限りなく 1 に近い近似度を持つ近似アルゴリズムを与えた．また，その拡張である，男女平等な中で最小不満度の安定マッチングを求める問題の NP 困難性を示し，この問題に対する 2 より小さい近似度の近似アルゴリズムを与えた [17]．なお，ここでは最小化問題を取り扱っているため，近似度は第 2 節における式の分子と分母を入れ替えて，

$$\max \left\{ \frac{A(I)}{opt(I)} \right\} \leq c$$

という形に基づいて定義される．

4.　配属数下限付き研修医配属問題

研修医配属問題は安定結婚問題の多対 1 への拡張である．男性を研修医，女性を病院とみなし，研修医は病院を，病院は研修医を希望リスト上で順序付けする（安定結婚問題と違い，研修医配属問題はオリジナルの問題で不完全リストを許すことになっている）．さらに，各病院は受け入れ可能な研修医の上限値を宣言する．ここでは，(i) 各研修医の配属先は高々1 つであり，(ii) 各病院に配属される研修医数はその病院の宣言した上限値以内である，という条件を満たす配属を**マッチング**と呼ぶ．マッチング M において，研修医 r が配属されている病院（もし存在すれば）を $M(r)$，病院 h に配属されている研修医の集合を $M(h)$ と書く．

マッチング M において，研修医 r は病院 h に配属されていないが，(1) r も h もお互いを希望リストに書き合っている，(2) r はどこにも配属されていないか，または，r は $M(r)$ よりも h を好む，(3) h への配属者数が上限に満ちていないか，または，h が r よりも下位に書いている研修医が $M(h)$ 中にいる，の 3 条件を満たすとき，(r, h) を M のブロッキングペアと言う．ブロッキングペアを含まないマッチングが安定マッチングであり，研修医配属問題も同様に，与えられた入力から安定マッチングを求める問題である．

研修医配属問題においても安定結婚問題の様々な性質が成り立つことが知られている [8]．例えば，全ての例題に少なくとも 1 つの安定マッチングが存在し，Gale-Shapley アルゴリズムによりそのうちの 1 つを求めることができる．また，安定結婚問題で不完全リストを許す拡張に対して成り立っていたのと同様の性質がここでも成り立つ [6]．すなわち，全ての安定マッチングにおいて，配属先のある研修医は同一であり，また，全ての安定マッチングにおいて，各病院に配属される研修医数は同じである．このことから，実応用において，以下の考察が成り立ち，新たな問題を考える必然性が生じる．例えば，ある安定マッチングにおいて研修医配属数 0 の病院があったとする．配属数 0 では病院運営に支障を来たす恐れがあるが，定理より他のどのような安定マッチングを選んだとしても配属数は 0 であり意味をなさない．このような状況は，例えば近年の日本では，医師の遍在により田舎の病院によく見られる問題である．従って，本研究では，それぞれの病院に対してある程度の配属数を保証するモデルを提案した．すなわち，各病院が配属者数の上限のみでなく，**下限**をも宣言できるようにし，上下限を満たす安定マッチングを求める問題 (**HRMQ**; 「Hospitals/Residents Problem with Minimum Quota」の略) を提案した．

上述の性質から，下限を無視した通常の研修医配属問題の安定マッチングは，各病院への配属数が一定である．したがって，ある 1 つの安定マッチングを求めて，それが全ての病院の上下限を満たしていれば求める解であるし，満たしていなければ上下限を満たす安定マッチングは存在しないと結論づけられるので，HRMQ はこの観点からは容易に解ける．しかし，解が存在しない場合にも何らかの答を得る必要が，現実にはある．そこで，本研究では，上下限を満たすマッチングの中で「**できるだけ安定**」なマッチングを求める問題を 2 つ提案し，その計算量に関して以下の結果を得た [9]．1 つ目は，ブロッキングペア数を最小化する問題（**Min-BP HRMQ**）である．本研究では，Min-BP HRMQ が NP 困難であること，および，P≠NP ならば多項式時間 $(|H|+|R|)^{1-\epsilon}$-近似アルゴリズムを持たないことを示した．ここで，H と R はそれぞれ病院と研修医の集合，ϵ は任意の正定数である．また，近似可能性に関して，Min-BP HRMQ に対する多項式時間 $(|H|+|R|)$-近似アルゴリズムを与えた．2 つ目の問題は，ブロッキングペアに関わる研修医数を最小化する問題（**Min-BR HRMQ**）である．Min-BR HRMQ に関しても同様に NP 困難性を示したが，近似可能性については $\sqrt{|R|}$-近似アルゴリズムを構築することにより Min-BP HRMQ よりも本質的に良い結果を得ることができた．

5. おわりに

本講演では，安定マッチング問題の定義や応用例，基本的性質などを紹介した．また，筆者らによって得られた最近の結果（特に近似アルゴリズムに関する結果）を幾つか紹介した．

謝辞． 本研究は科研費 (15700010, 17700015, 20700009) の助成を受けたものである．本稿に掲載した研究成果について共同研究を行った以下の方々に感謝する．京都大学教授 岩間一雄氏，研究当時に京都大学の学生であった盛田保文氏，柳澤弘揮氏，岡本和也氏，山内直哉氏，濱田浩気氏，レイキャビク大学 Professor Magnús M. Halldórsson 氏，グラスゴー大学 Senior Lecturer Robert W. Irving 氏，グラスゴー大学 Lecturer David F Manlove 氏，およびグラスゴー大学の学生であった Sandy Scott 氏．

文　献

[1] D. J. Abraham, R. W. Irving and D. F. Manlove, "Two algorithms for the Student-Project Allocation problem," *J. Discrete Algorithms*, Vol.5, No.1, pp. 73–90, 2007.

[2] A. T. Benjamin, C. Converse and H. A. Krieger, "How do I marry thee? Let me count the ways," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.59, pp. 285–292, 1995.

[3] T. Feder, "A new fixed point approach for stable networks and stable marriages," *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 45, pp. 233–284, 1992.

[4] T. Feder, "Network flow and 2-satisfiability," *Algorithmica*, Vol. 11, pp. 291–319, 1994.

[5] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Math. Monthly*, Vol.69, pp. 9–15, 1962.

[6] D. Gale and M. Sotomayor, "Some remarks on the stable matching problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.11, pp. 223–232, 1985.

[7] D. Gusfield, "Three fast algorithms for four problems in stable marriage," *SIAM J. Comput.*, Vol. 16, Issue 1, pp. 111–128, 1987.

[8] D. Gusfield and R. W. Irving, "The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms," MIT Press, Boston, MA, 1989.

[9] K. Hamada, K. Iwama, and S. Miyazaki, "The Hospitals/Residents Problem with Quota Lower Bounds," Manuscript, 2009.

[10] R. W. Irving and P. Leather, "The complexity of counting stable marriages," *SIAM J. Comput.*, Vol.15, pp. 655–667, 1986.

[11] R. W. Irving, P. Leather and D. Gusfield, "An efficient algorithm for the "optimal" stable marriage," *Journal of the ACM*, Vol. 34, pp. 532–543, 1987.

[12] R. W. Irving, "Stable marriage and indifference," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.48, pp. 261–272, 1994.

[13] K. Iwama, D. F. Manlove, S. Miyazaki, and Y. Morita, "Stable marriage with incomplete lists and ties," *Proc. ICALP 99*, LNCS 1644, pp. 443–452, 1999.

[14] K. Iwama, S. Miyazaki and K. Okamoto, "A $(2-c\log N/N)$-approximation algorithm for the stable marriage problem, *Proc. SWAT 2004*, LNCS 3111, pp. 349–361, 2004.

[15] K. Iwama, S. Miyazaki, N. Yamauchi, "A $(2-c\frac{1}{\sqrt{N}})$-approximation algorithm for the stable marriage problem," *Algorithmica*, Vol. 51, pp. 342–356, 2008.

[16] K. Iwama, S. Miyazaki, N. Yamauchi, "A 1.875-approximation algorithm for the stable marriage problem," *Proc. SODA 2007*, pp. 288–297, 2007.

[17] K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa, "Approximation algorithms for the sex-equal stable marriage problem," *Proc. WADS 2007*, LNCS 4619, pp. 201–213, 2007.

[18] A. Kato, "Complexity of the sex-equal stable marriage problem," *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics (JJIAM)*, Vol. 10, pp. 1–19, 1993.

[19] Z. Király, "Better and simpler approximation algorithms for the stable marriage problem," *Proc. ESA 2008*, LNCS 5193, pp. 623–634, 2008.

[20] E. McDermid, "A 3/2-approximation algorithm for general stable marriage," *Proc. ICALP 2009*, LNCS 5555, pp. 689–700, 2009.

[21] A. E. Roth, T. Sonmez, and M. U. Unver, "Pairwise kidney exchange," *Journal of Economic Theory*, Elsevier, Vol. 125, No. 2, pp. 151–188, 2005.

[22] C.P. Teo, J.V. Sethuraman and W.P. Tan, "Gale-Shapley stable marriage problem revisited: strategic issues and applications," *Proc. IPCO 99*, LNCS 1610, pp. 429-438, 1999.

[23] E. G. Thurber, "Concerning the maximum number of stable matchings in the stable marriage problem," *Discrete Mathematics*, Vol.248, pp. 195–219, 2002.

[24] H. Yanagisawa, "Approximation algorithms for stable marriage problems," PhD thesis, Kyoto University, Graduate School of Informatics, 2007.

[25] Canadian Resident Matching Service, http://www.carms.ca/

[26] Japan Residency Matching Program, http://www.jrmp.jp/

[27] National Resident Matching Program, http://www.nrmp.org/

[28] Scottish Foundation Allocation Scheme (SFAS), http://www.nes.scot.nhs.uk/sfas/About/default.asp